- الفصل الثالث -

- مقاييس النزعة المركزية (مقاييس التوسط)

يمكن تمثيل مجموعة من البيانات بقيمة واحدة فقط وذلك لاعطاء صورة سريعة عن ماهية تلك المجموعة من خلال ايجاد عدد يمثل قيمها. ان المقياس الذي يختص بتحديد هذا العدد يسمى مقاييس النزعة المركزية او مقياس توسط (متوسط).

تعريف مقاييس النزعة المركزية :- عدد يميل لان يقع في وسط مجموعة من البيانات في حال ترتيبها حسب صغرها أو كبرها، بمعنى ان هذا العدد يؤول لان يتمركز وسط المجموعة التي أحتسب منها.

ويمكن أن تنقسم مقاييس النزعة المركزية الى عدد من المقاييس الآتية :-

أولاً- الوسط الحسابي Arithmetic Mean

ويسمى ايضاً بـ «الوسط» او «المتوسط mean» او «المعدل الحسابي Average».

طرق حساب الوسط الحسابي

أ- الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة :-

1- الطريقة المباشرة (القيم الاصلية) :- الوسط الحسابي بموجب هذه الطريقة يمثل مجموع قياسات (قراءات او مفردات او مشاهدات) مفردات العينة مقسوماً على عددها ويرمز له بالرمز ($\bar{X}$) ويمكن استخراجه بالصيغة الآتية.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

قبل البدء بدراسة المتوسطات يمكن التعرف على بعض الرموز الرياضية التي سيتم عرضها.

n : تمثل حجم العينة تحت الدراسة او عدد القراءات او عدد المشاهدات.

($X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$) : تمثل جميع القراءات، القراءة الاولى والقراءة الثانية حتى القراءة رقم n.

$\sum_{i=1}^{n} X_i$: تمثل مجموع جميع القراءات ($X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$).

$\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot X_i$: تمثل مجموع حاصل ضرب التكرار في القراءة المناظرة لجميع القراءات ($X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$)

مثال 1- البيانات التالية تمثل اوزان عينة من الطلبة قوامها (15) طالب، والمطلوب ايجاد متوسط وزن الطالب في هذه العينة.

50.2 , 60.9 , 68.3 , 59.2 , 58.1 , 62.3 , 65.3 , 52.9 ,
61.5 , 63.2 , 59.1 , 69.3 , 64.2 , 65.2 , 56.6 .

الحل:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{50.2 + 60.9 + 68.3 + \cdots + 56.6}{15}$$

$$= \frac{916.3}{15} = 61.087 \quad \text{كيلو غرام}$$

في حالة ترتيب هذه البيانات ترتيباً تصاعدياً نحصل على السلسلة التالية

$\bar{X} =$ 50.2 , 52.9 , 56.6 , 58.1 , 59.1 , 59.2 , 60.9 , 61.5 ,
62.3 , 63.2 , 64.2 , 65.2 , 65.3 , 68.3 , 69.3 .

نلاحظ تمركز قيمة $\bar{X}$ وسط هذه المجموعة (61.5) وهذا ما نقصده بمقاييس النزعة مركزية.

مثال 2 - البيانات التالية تمثل عدد افراد عينة من الاسر قوامها (12) اسرة (بضمنها الوالدين). والمطلوب ايجاد متوسط عدد افراد الاسرة.

3 , 4 , 7 , 8 , 10 , 9 , 2 , 5 , 6 , 9 , 7 , 5

الحل:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{3+4+7+\cdots+7+5}{12} = \frac{75}{12}$$

$$= 6.25 \simeq 6 \quad \text{فرد}$$

مثال 3: ماهو المتوسط الحسابي لأجور عشرة عمال يومياً، البيانات هي:

32 , 29 , 35 , 38 , 41 , 35 , 41 , 35 , 36 , 260

الحل:

$$\bar{X} = \frac{582}{10} = 58.2$$

نلاحظ ان (9) من (10) أجور للعمال دون المتوسط الحسابي وبهذه الحالة لا يكون للمتوسط الحسابي تمثيل واقعي لمتوسط الاجور بشكل مقبول، إذ ان آخر قراءة (260) هي قيمة كبيرة جداً مقارنة ببقية القراءات وهو ما نطلق عليه بالقيم الشاذة أو المتطرفة outliers .

2- الطريقة المختصرة (طريقة الانحرافات): تستخدم هذه الطريقة في حالة كون قياسات العينة اعداد كبيرة يصعب التعامل معها عند ايجاد الوسط الحسابي وخاصة عندم توفر حاسبات تفي بالغرض مما يفضل أختزال هذه الاعداد الى اعداد أصغر يسهل التعامل معها. نختار وسط فرضي قريب من الوسط الحسابي من نفس البيانات او خارج عنها ويرمز له (a) ثم نجد انحرافات القيم عن الوسط الفرضي ويرمز له (d_i)، وعليه يمكن استخراج الوسط الحسابي وفق الصيغه الآتية:

$$\bar{X} = a + \frac{\sum d_i}{n}$$

مثال 1: البيانات التالية تمثل اوزان عينة من الطلبة قوامها (15) طالب والمطلوب ايجاد متوسط وزن الطالب في هذه العينة.

50.2 , 60.9 , 68.3 , 59.2 , 58.1 , 62.3 , 65.3 . 52.9 ,
61.5 , 63.2 , 59.1 , 69.3 , 64.2 , 65.2 , 56.6

الحل: نختار الوسط الفرضي الثابت a وليكن مساوياً الى (61.5) كقيمة.

2- نجد قيمة d_i والتي تساوي $d_i = x_i - a$ ، حيث ان d_i تعني انحرافات قيم x_i عن الثابت a.

3- نستخرج مجموع $\sum d_i$.

$d_i = x_i - a$	
$d_1 = 50.2 - 61.5 = -11.3$	$d_9 = 61.5 - 61.5 = 0$
$d_2 = 60.9 - 61.5 = -0.6$	$d_{10} = 63.2 - 61.5 = 1.7$
$d_3 = 68.3 - 61.5 = 6.8$	$d_{11} = 59.1 - 61.5 = -2.4$
$d_4 = 59.2 - 61.5 = -2.3$	$d_{12} = 69.3 - 61.5 = 7.8$
$d_5 = 58.1 - 61.5 = -3.4$	$d_{13} = 64.2 - 61.5 = 2.7$
$d_6 = 62.3 - 61.5 = 0.8$	$d_{14} = 65.2 - 61.5 = 3.7$
$d_7 = 65.3 - 61.5 = 3.8$	$d_{15} = 56.6 - 61.5 = -4.9$
$d_8 = 52.9 - 61.5 = -8.6$	
$\sum d_i = -6.2$	

$$\because \bar{X} = a + \frac{\sum d_i}{n} , \quad d_i = x_i - a$$

$$\therefore \bar{X} = 61.5 + \frac{-6.2}{15} = 61.5 + (-0.413) = 61.087$$

ويمكن اختيار اي عدد آخر كقيمة للثابت a دون ان يؤثر ذلك على قيمة الوسط الحسابي.

ب - الوسط الحسابي للبيانات المبوبة .

1- الطريقة المباشرة (القيم الاصلية) :- يتم احتساب الوسط الحسابي وفق هذه الطريقة بأستخدام مراكز الفئات للتوزيع التكراري سواء كانت الفئات متساوية ام غير متساوية . ويمكن استخراجه بالصيغة الآتية .

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i . x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

مثال 1 : الآتي توزيع تكراري لدرجات الحرارة في مدينة معينة المسجلة لمدة (95) يوماً متتالياً . المطلوب حساب متوسط درجة الحرارة في هذه المدينة خلال هذه الفترة .

درجات الحرارة : 0 - ، 1 - ، 2 - ، 3 - ، 4 - ، 5 - ، 6 - ، 7 - 8

عدد الايام : 4 8 12 16 20 25 6 4

الحل :

1- تعيين مراكز الفئات

2- ضرب مركز كل فئة في التكرار المقابل له .

3- قسمة مجموع (حاصل ضرب مركز كل فئة * تكرارها) على مجموع التكرارات

4- عمل جدول يتضمن كل ماذكر سابقاً .

الفئات	التكرارات f_i	مراكز الفئات X_i	$f_i \cdot X_i$
0 -	4	0.5	2
1 -	8	1.5	12
2 -	12	2.5	30
3 -	16	3.5	56
4 -	20	4.5	90
5 -	25	5.5	137.5
6 -	6	6.5	39
7 - 8	4	7.5	30
المجموع	95	—	396.5

$$\therefore \bar{X} = \frac{\sum f_i . x_i}{\sum f_i} = \frac{396.5}{95} = 4.174^\circ$$

نستنتج ان متوسط درجة الحرارة في هذه المدينة خلال هذه الفترة كان (4.174°) درجة مئوية وان تمركز الوسط الحسابي وسط التوزيع ضمن الفئة الخامسة منه .

مثال 2 ـ الآتي توزيع تكراري لعينة من الاسر قوامها (75) أسرة حسب عدد افراد الاسرة (بضمنهما الوالدين). المطلوب حساب متوسط عدد افراد الاسرة في هذه العينة.

عدد الافراد : 2-4 5-7 8-10 11-13 14-16 17-19 20-22

عدد الاسر : 8 12 20 13 10 8 4

الحل :

classes	f_i	X_i	$f_i \cdot X_i$
2 - 4	8	3	24
5 - 7	12	6	72
8 - 10	20	9	180
11 - 13	13	12	156
14 - 16	10	15	150
17 - 19	8	18	144
20 - 22	4	21	84
المجموع	75	—	810

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i X_i}{\sum f_i} = \frac{810}{75} = 10.8 \simeq 11$$

بما ان عدد افراد الاسرة متغير متقطع وانه لا يوجد تقسيم لجزء من الفرد وعليه يتم تقريب الناتج لاقرب عدد صحيح فإن متوسط عدد افراد الاسرة هو (11) فرداً وان تمركز قيمة الوسط الحسابي وسط التوزيع ضمن الفئة الرابعة منه.

مثال 3 : الآتي توزيع تكراري للرواتب الاسمية لمجموعة موظفين في احدى دوائر الدولة، المطلوب حساب متوسط الراتب الاسمي للموظف في هذه الدائرة.

الراتب الاسمي : -69.5 -72.5 -76.5 -88.5 -97.5 112.5-130.5

عدد الموظفين : 6 10 18 25 12 7

نلاحظ ان اطوال الفئات غير متساوية الا انه يمكن ايجاد قيمة الوسط الحسابي.

الحل :

$f_i \cdot x_i$	مركز الفئة x_i	طول الفئة L_i	التكرار f_i	classes
426	71	3	6	69.5 –
745	74.5	4	10	72.5 –
1485	82.5	12	18	76.5 –
2325	93	9	25	88.5 –
1260	105	15	12	97.5 –
850.5	121.5	18	7	112.5 – 130.5
7091.5		—	78	المجموع

متوسط الراتب اليومي $\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{7091.5}{78} = 90.917$

2 - الطريقة المختصرة (طريقة الانحرافات).

يمكن استخراج الوسط الحسابي وفق هذه الطريقة باستخدام مراكز فئات توزيع تكراري والتكرارات المقابلة لفئات هذا التوزيع وكذلك اختيار وسط فرضي (a) اختيار حقيقي إذ يمكن إيجاد الوسط الحسابي باستخدام الصيغة الآتية.

حيث ان $d_i = x_i - a$ ، $\bar{X} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i}$

مثال 1 : الآتي توزيع تكراري لأطوال عينة من الأشخاص تحتها (70) شخص.
المطلوب إيجاد متوسط طول الشخص بالسنتمتر في هذه العينة.

فئات الطول :	140 –	148 –	156 –	164 –	172 –	180 –	188 – 196
عدد الأشخاص	4	6	15	20	17	7	1

الحل :

1 - نستخرج مركز كل فئة في التوزيع التكراري.

2 - نستخرج قيم (d_i) $d_i = x_i - a$ ، بعد اختيار الثابت (a) وليكن مساوياً الى مركز الفئة الرابعة منه (168).

$a = 168$.

$f_i \cdot d_i$	$d_i = x_i - a$	مركز الفئة x_i	f_i	classes
−96	−24 =	⇐ 144 − 168	4	140 −
−96	−16	152	6	148 −
−120	−8	160	15	156 −
0	0	168	20	164 −
136	8	176	17	172 −
112	16	184	7	180 −
24	24	192	1	188 − 196
−40			70	المجموع

$$\bar{X} = a + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 168 + \frac{-40}{70} = 168 + (-0.571)$$

$= 167.429$ سنتمتر

3- الطريقة المقصيرة (طريقة الانحرافات المقسومة على طول الفئة).

يمكن استخدام هذه الطريقة في حالة تساوي اطوال فئات التوزيع التكراري ، ويتم ايجاد الوسط الحسابي بالصيغة الآتية :

$$\bar{X} = a + \frac{\sum f_i d_i^*}{\sum f_i} \cdot L$$

حيث إن ، $d_i^* = \frac{x_i - a}{L}$

مثال 2. بأستخدام نفس بيانات المثال رقم (1) السابق الذي تم حله بالطريقة المختصرة.

الحل :

1- نستخرج مراكز الفئات للتوزيع التكراري.

2- نختار الثابت (a) وليكن مساوياً لمركز الفئة الرابعة (168).

3- نحدد طول الفئة.

4- نستخرج قيم $d_i^* = \frac{x_i - a}{L}$.

5- نستخرج مجموع (حاصل ضرب مركز كل فئة * d_i^*).

$f_i \cdot d_i^*$	$d_i^* = \frac{x_i - a}{L}$	x_i	f_i	classes
-12	-3	144	4	140 –
-12	-2	152	6	148 –
-15	-1	160	15	156 –
0	0	168	20	164 –
17	1	176	17	172 –
14	2	184	7	180 –
3	3	192	1	188 – 196
-5	–	–	70	المجموع

$$\bar{X} = a + \frac{\sum f_i d_i^*}{\sum f_i} \cdot L$$ حيث ان $L = 8$

$$= 168 + \frac{-5}{70} \cdot 8 = 168 + (-0.571) = 167.429$$ سنتمتر

خصائص الوسط الحسابي :

١- ان مجموع انحرافات قيم المتغير X عن وسطها الحسابي الذي احتسب منه يكون مساوياً للصفر .

البرهان : ليكن $\bar{X}$ يمثل الوسط الحسابي لقياسات عينة من المفردات قوامها n ولنفرض ان d_i يمثل انحرافات x_i عن $\bar{X}$ اي ان $d_i = x_i - \bar{X} \quad , i = 1,2,3,\dots,n$

عندئذٍ فإن : $\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{X}$

لكن .. $\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{X}$ وان $\sum_{i=1}^{n} \bar{X} = n\bar{X}$

وعليه فإن : $\sum_{i=1}^{n} d_i = n\bar{X} - n\bar{X} = 0$

٢- أن مجموع مربعات انحرافات قيم X عن وسطها الحسابي الذي احتسب منه يكون اقل ما يمكن .

البرهان : ليكن a ثابت حقيقي، وان $x_i = x_1, x_2, \dots, x_m$ تمثل مراكز فئات التوزيع التكراري ، وان $f_i = f_1, f_2, \dots, f_m$ تمثل التكرارات المقابلة لهذه الفئات وليكن $x_i - a$ يمثل انحراف مركز الفئة i عن a وعندئذٍ فإن مربع هذا الانحراف هو $(x_i - a)^2$ وان عدد مرات تكرار مربع الانحراف هذا ضمن الفئة i هو $f_i (x_i - a)^2$ وان مجموع مربعات الانحرافات لعموم التوزيع التكراري هو

$$Q = \sum f_i (x_i - a)^2$$

مثال: للتوزيع التكراري التالي بين ان مجموع مربعات انحرافات قيم X عن وسطها الحسابي هو اقل من مجموع مربعات انحرافات قيم هذا المتغير عن أي قيمة أخرى غير الوسط الحسابي.

الفئات: 10 - 20 - 30 - 40 - 50 - 60 - 70 - 80

التكرار: 2 5 10 20 10 5 2

الحل: ان قيمة الوسط الحسابي لهذا التوزيع يمكن البيان انها مساوية الى (45). فنختار اي عدد آخر غير الوسط الحسابي سواء أكبر من (45) او أقل منه، وليكن مثلاً (65) ونعمل الجدول التالي:

مراكز الفئات X_i	التكرار f_i	$X_i - 45$	$f_i(X_i-45)^2$	$X_i - 65$	$f_i(X_i-65)^2$
15	2	-30	1800	-50	5000
25	5	-20	2000	-40	8000
35	10	-10	1000	-30	9000
45	20	0	0	-20	8000
55	10	10	1000	-10	1000
65	5	20	2000	0	0
75	2	30	1800	10	200
المجموع	54	—	9600	—	31200

نلاحظ إن $\sum f_i(x_i-\bar{X})^2 < \sum f_i(x_i-65)^2$

3- إن الوسط الحسابي لمجموعة اوساط حسابية لظاهرة معينة (متغير) معطى بالصيغة الآتية:

$$\bar{X} = \frac{\sum n_i \bar{X}_i}{\sum n_i} \quad , \quad \bar{X}_i = \frac{\sum X_{ij}}{n_i} \quad \Leftarrow \text{حيث ان}$$

مثال: البيانات في الجدول التالي تمثل متوسطات لدرجات الطلبة في ثلاثة شعب من احدى المراحل لامتحان معين. المطلوب حساب الوسط الحسابي لدرجة الطالب في هذا الامتحان لتلك المرحلة.

الشعبة	عدد الطلبة	متوسط الدرجة
1	50	62.3
2	62	69.6
3	58	71.8

$$\bar{X} = \frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2 + n_3\bar{X}_3}{n_1+n_2+n_3} = \frac{(50)(62.3)+(62)(69.6)+(58)(71.8)}{50+62+58} = \frac{11594.6}{170} = 68.2$$

مزايا وعيوب الوسط الحسابي

المزايا :-

1- بساطة فكرته ، 2- سهولة حسابه ، 3- يستند لكافة البيانات المتاحة

4- ان حسابه يخضع للعمليات الجبرية ، 5- اكثر المقاييس استخداماً وفهماً .

العيوب :

1- لا يمكن ايجاد الوسط الحسابي لبيانات متغير وصفي (نوعي) كالجنس ، صنف الدم ، التسوية ... الخ الا في الحالات التي يمكن فيها اعادة تقييس الصفات ، مثل تقديرات الامتحان المعتمد في التعليم العالي (ضعيف ، مقبول ، متوسط ، جيد ، جيد جداً ، ممتاز) وهي صفات لمتغير نوعي يمكن اعادة تقييسها بفئات وهي على التوالي (0-50-60-70-80-90-100).

2- لا يمكن تحديد قيمة الوسط الحسابي هندسياً .

3- لا يمكن حساب قيمة الوسط الحسابي في حالة فقدان قيمة او اكثر من قيم العينة الا من خلال تقدير هذه القيم او الاستعاضة عنها بقيم مفردات مكملة لحجم العينة .

4- يتأثر الوسط الحسابي على نحو كبير بالقيم الشاذة (المتطرفة) وبهذه الحالة لا يجوز الاعتماد على هذا المقياس وانما الاعتماد على مقياس توسط أخر او استبعاد القيم الشاذة من خلال اختبارات خاصة والتعويض عنها بقيم مقدرة او بديلة .

5- تتأثر قيمة الوسط الحسابي بأخطاء المعاينة ، فأي تسجيل خاطئ لقياسات العينة ينعكس اثره في عملية حساب الوسط الحسابي التي تستند الى قياسات مفردات العينة .

6- لا يمكن ايجاد قيمة الوسط الحسابي في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة من طرف واحد او طرفين

ثانياً :- الوسيط The median

يعتبر الوسيط احد مقاييس النزعة المركزية المهمة في التطبيقات الاحصائية .
ويعرف الوسيط : تلك القيمة من قيم المتغير العشوائي X التي تقسم مجموعة من قيم المتغير الى قسمين متساويين ، اي انها قيمة X التي تجعل عدد القيم قبلها مساوٍ لعدد القيم بعدها، ويرمز له بالرمز " Me " .

طرق ايجاد قيمة الوسيط :

أ- الوسيط لبيانات غير مبوبة :

1- اذا كان عدد القيم (n) عدد فردي عندئذٍ فإن قيمة الوسيط تمثل قيمة X بعد الترتيب على نحو تصاعدي او تنازلي كما في الصيغة الآتية : $\frac{n+1}{2}$

مثال 1 - الآتي درجات عينة من الطلبة قوامها (9) طلاب في امتحان معين .
المطلوب جد الوسيط لهذه المجموعة .

55 ، 62 ، 53 ، 70 ، 68 ، 65 ، 63 ، 79 ، 80

الحل : نرتب القيم وفق ترتيب تصاعدي .

53 ، 55 ، 62 ، 63 ، 65 ، 68 ، 70 ، 79 ، 80

بما إن عدد القيم (n) هو عدد فردي نستخدم الصيغة الآتية :

$$Me = \frac{n+1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

وهذا يعني إن القيمة الخامسة هي قيمة الوسيط اي ، الدرجة (65) .

2- اذا كان عدد القيم (n) عدد زوجي فعندئذٍ قيمة الوسيط تمثل الوسط الحسابي لقيمتي X بعد الترتيب اما تصاعدياً او تنازلياً وكما في الصيغة الاتية :

$$\frac{n}{2} + 1 \quad ، \quad \frac{n}{2}$$

مثال 2 - الآتي أعمار عينة من الافراد قوامها (12) فرد . اوجد الوسيط لعمر الفرد في هذه المجموعة .

20 , 22 , 19.5 , 26 , 24.5 , 27 , 28 , 29 , 18 , 20 , 23 , 25

الحل : نرتب القيم وفق الترتيب التنازلي وكما يلي :

29 , 28 , 27 , 26 , 25 , 24.5 , 23 , 22 , 20 , 20 , 19.5 , 18

بما إن عدد القيم (n) هو عدد زوجي نستخدم الصيغة الآتية :

$$\frac{n}{2} + 1 = \frac{12}{2} + 1 = 7 \quad ، \quad \frac{n}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

مما يعني ان القيمتان اللتان تحددان الوسيط هما التسلسل (السادس والسابع) اي (24.5 , 23) والوسيط يمثل الوسط الحسابي لهما . $Me = \frac{24.5 + 23}{2} = 23.75$ سنة

ب - الوسيط لبيانات مبوبة : وينقسم الى قسمين :

1- الوسيط لبيانات مبوبة لمتغير عشوائي متقطع :

افرض وجود توزيع تكراري لبيانات متغير متقطع عدد فئاته (m) وان $f_1, f_2 ... f_m$ تمثل التكرارات المقابلة لفئات هذا التوزيع ، وان $F_1, F_2 ... F_m$ تمثل التكرارات المتجمعة الصاعدة المقابلة للحدود العليا للفئات ، ومن تعريف الوسيط ((هو القيمة التي تقسم مجموعة القيم الى قسمين متساويين مما يعني ان تسلسل (ترتيب) الوسيط في حالة التوزيعات التكرارية يمثل نصف التكرارات ($\frac{\sum f_i}{2}$) ، اي ان الوسيط هنا يمثل القيمة التي تترك نصف مجموع التكرارات قبلها والنصف الآخر بعدها .

مثال : الآتي توزيع تكراري لعينة من الأسر حسب عدد افراد الاسرة المطلوب حساب الوسيط لعدد افراد الأسرة .

عدد الفئات :	2-4	5-7	8-10	11-13	14-16	17-19	20-22
عدد الاسرة :	6	9	12	20	14	11	8

الحل 1- نعمل الجدول الآتي :

الفئات	التكرار f_i	الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد F_i
2 - 4	6	4	6
5 - 7	9	7	15
8 - 9	12	9	27
11 - 13	20	13	47
14 - 16	14	16	61
17 - 19	11	19	72
20 - 22	8	22	80
المجموع	80		

2- نستخرج ترتيب الوسيط : $T = \frac{\sum f_i}{2} = \frac{80}{2} = 40$

حيث ان T ترتيب الوسيط

بعد استخراج قيمة ترتيب الوسيط نلاحظ ان ترتيب الوسيط ضمن التكرار المتجمع الصاعد يكون كمايلي ($27 < 40 < 47$) ، وعليه فإن فئة الوسيط لهذا التوزيع هي الفئة الرابعة (11 - 13) ، وعندئذٍ فإن الوسيط لهذا التوزيع يمثل مركز هذه الفئة وكمايلي :

$Me = \frac{11 + 13}{2} = 12$ فرد

2- الوسيط لبيانات مبوبة لمتغير عشوائي مستمر :

افرض وجود توزيع تكراري عدد فئاته (m) وأن $f_1, f_2, \ldots, f_m$ تمثل التكرارات المقابلة لفئات التوزيع، وأن $F_1, F_2, \ldots, F_m$ تمثل التكرارات المتجمعة الصاعدة المقابلة للحدود العليا لفئات التوزيع. وليكن $\left(\frac{\sum f_i}{2}\right)$ يمثل ترتيب الوسيط فإن حساب قيمة الوسيط تكون وفق الصيغة الآتية :

$$Me = L_k + \frac{h_k}{f_k}\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} f_i}{2} - F_{k-1}\right)$$

حيث إن :

L_k : الحد الأدنى لفئة الوسيط .

f_k : تكرار فئة الوسيط .

h_k : طول فئة الوسيط .

F_{k-1} : التكرار المتجمع الصاعد السابق لفئة الوسيط .

مثال (1) : الآتي توزيع تكراري للدخل الشهري لعينة من الأسر قوامها 80 أسرة . جد الوسيط للدخل الشهري للأسرة في هذه العينة .

الفئات : 100– 120– 140– 160– 180– 200– 220–240

عدد الأسر : 3 7 14 20 18 12 6

الحل : 1- نجد التوزيع التكراري المتجمع الصاعد من خلال الجدول الآتي :

الفئات	التكرار f_i	الحدود العليا للفئات	F_i التكرار المتجمع الصاعد
100 –	3	أقل من 120	3
120 –	7	140	10
140 –	14	160	24 ← المتجمع الصاعد السابق لفئة الوسيط
الحد الأدنى لفئة الوسيط ← 160 –	تكرار الفئة 20	180	44
180 –	18	200	62
200 –	12	220	74
220 – 240	6	240	80
المجموع	80		

2- نجد ترتيب الوسيط $T = \frac{80}{2} = 40$

3- نقارن بين قيمة ترتيب الوسيط مع التكرار المتجمع الصاعد فنلاحظ إن $24 < 40 < 44$ ، وعليه فإن فئة الوسيط هي الفئة الرابعة من التوزيع وهي $(160-180)$.

4 - معطيات الموجودة هي:

$L_4 = 160$, $h_4 = 20$, $f_4 = 20$, $F_3 = 24$

5 - نستخدم الصيغة الآتية لحساب الوسيط:

$$Me = L_k + \frac{h_k}{f_k}\left(\frac{\sum f_i}{2} - F_{k-1}\right)$$

$$= 160 + \frac{20}{20}(40 - 24) = 176 \text{ دينار}$$

مثال (2) : لنفس بيانات المثال رقم (1) جد الوسيط باستخدام التوزيع التكراري المتجمع النازل:

الحل: 1- نجد التوزيع التكراري المتجمع النازل من خلال الجدول الآتي:

الفئات	التكرار f_i	الحدود الدنيا للفئات	التكرار المتجمع النازل F_i^*
100 -	3	أكبر من 100	80
120 -	7	120 ،،	77
140 -	14	140 ،،	70
160 -	20	160 ،،	56 ← المتجمع النازل السابق لترتيب الوسيط
180 -	18	180 ،،	36
200 -	12	200 ،،	18
220 - 240	6	220 ،،	6
المجموع	80		

2 - نجد ترتيب الوسيط $T = \frac{\sum f_i}{2} = \frac{80}{2} = 40$

3 - نقارن بين قيمة ترتيب الوسيط مع التكرار المتجمع النازل نلاحظ أن $36 < 40 < 56$ ، وعليه فإن فئة الوسيط هي الفئة الرابعة من التوزيع (160-180).

4 - المعطيات الموجودة هي:

$L_4 = 160$, $h_4 = 20$, $f_4 = 20$, $F_3^* = 56$

5 - نستخدم الصيغة الآتية لحساب الوسيط:

$$Me = L_k + \frac{h_k}{f_k}\left(F_{k-1}^* - \frac{\sum f_i}{2}\right)$$

حيث إن

L_k = الحد الادنى لفئة الوسيط

f_k = تكرار فئة الوسيط

h_k = طول فئة الوسيط

F^*_{k-1} = التكرار المتجمع النازل السابق لترتيب الوسيط

$$Me = 160 + \frac{20}{20}(56 - 40) = 160 + 16 = 176$$ دينار

ملاحظة :- في حالة التكرار المتجمع الصاعد نختار الفئة الوسطية المقابلة للتكرار الاقرب، وفي حالة التكرار المتجمع النازل نختار الفئة الوسطية المقابلة للتكرار الابعد.

مثال (3) : الآتي توزيع تكراري لاعمار عينة من تلاميذ إحدى المدارس الابتدائية قوامها 90 تلميذ. جد الوسيط لعمر التلميذ في هذه العينة.

فئات العمر :	اقل من 6	6 -	7 -	8 -	9 -	10 -	11 -	12 فأكثر
عدد التلاميذ :	3	6	9	12	20	18	17	5

الحل : 1- نجد التوزيع التكراري المتجمع الصاعد وفق الجدول الآتي :

الفئات	التكرار f_i	الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد F_i
اقل من 6	3	اقل من 6	3
6 -	6	7 " "	9
7 -	9	8 " "	18
8 -	12	9 " "	30
9 -	20	10 " "	50
10 -	18	11 " "	68
11 -	17	12 " "	85
12 فأكثر	5	أقل من مجهول	90
المجموع	90		

2- نجد ترتيب الوسيط $T = \frac{\sum f_i}{2} = \frac{90}{2} = 45$

3- نقارن ترتيب الوسيط مع التكرار المتجمع الصاعد نلاحظ إن $30 < 45 < 50$ وعليه فإن فئة الوسيط هي الفئة الخامسة (9 - 10).

4- نجد الوسيط حسب المعطيات بالصيغة الآتية :

$$Me = L_k + \frac{h_k}{f_k}\left(\frac{\sum f_i}{2} - F_{k-1}\right) = 9 + \frac{1}{20}(45 - 30) = 9.75$$ سنة

مثال (4) : الآتي توزيع تكراري لعينة من الموظفين موزعين حسب الرواتب الاسمية المحددة . المطلوب حساب الوسيط للراتب الاسمي .

الفئات : 18 — 28 — 36 — 50 — 70 — 100 — 135 — 150

التكرار : 10 15 18 22 20 18 13

الحل : 1- نجد التكرار المتجمع الصاعد أو النازل وفق الجدول الآتي :

الفئات	التكرار f_i	الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد F_i
18 —	10	28	10
28 —	15	36	25
36 —	18	50	43
50 —	22	70	65
70 —	20	100	85
100 —	18	135	103
135 — 150	13	150	116
	116		

2 - نجد ترتيب الوسيط $T = \frac{\sum f_i}{2} = \frac{116}{2} = 58$

3 - نقارن ترتيب الوسيط مع التكرار المتجمع الصاعد نلاحظ إن $43 < 58 < 65$ وهذا يعني إن فئة الوسيط هي الفئة الرابعة (50-70) .

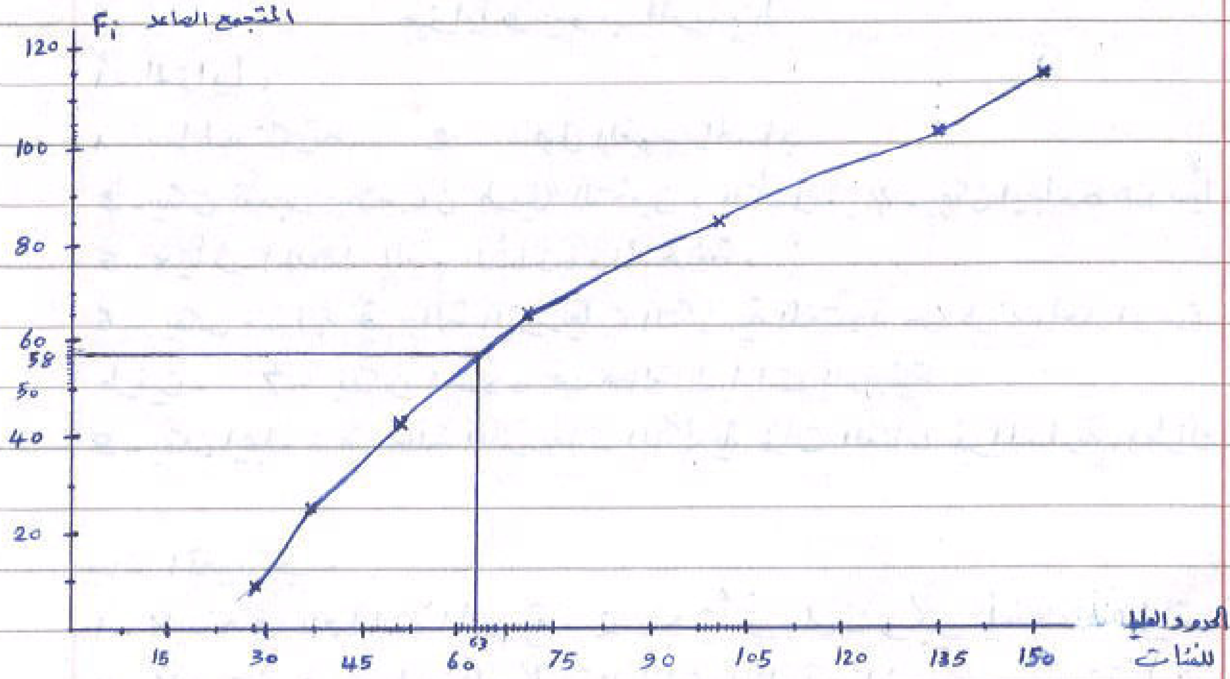
4 - نجد الوسيط حسب المعطيات بالصيغة الآتية :

$$Me = L_k + \frac{h_k}{f_k}\left(\frac{\sum f_i}{2} - F_{k-1}\right) = 50 + \frac{20}{22}(58-43)$$
$$= 63.636 \text{ دينار}$$

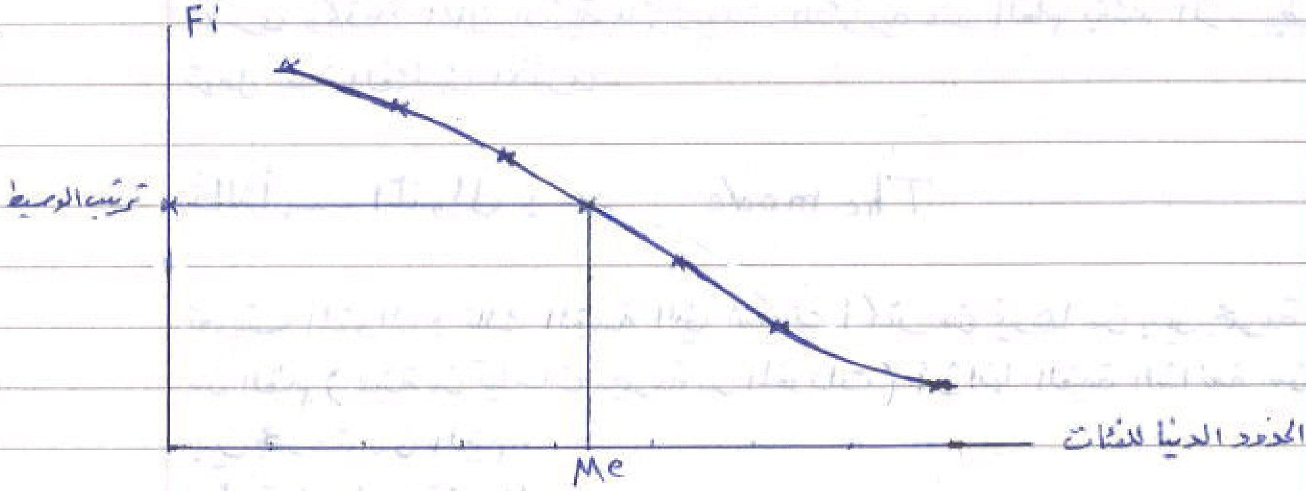
الهدف من المثال اعلاه هو إمكانية ايجاد الوسيط في حالة التوزيعات التكرارية ذات الفئات غير المتساوية الاطوال .

ملاحظة :- يمكن ايجاد قيمة تقريبية للوسيط هندسياً من خلال المنحنى التكراري المتجمع الصاعد أو النازل او كليهما معاً وعلى النحو الآتي :

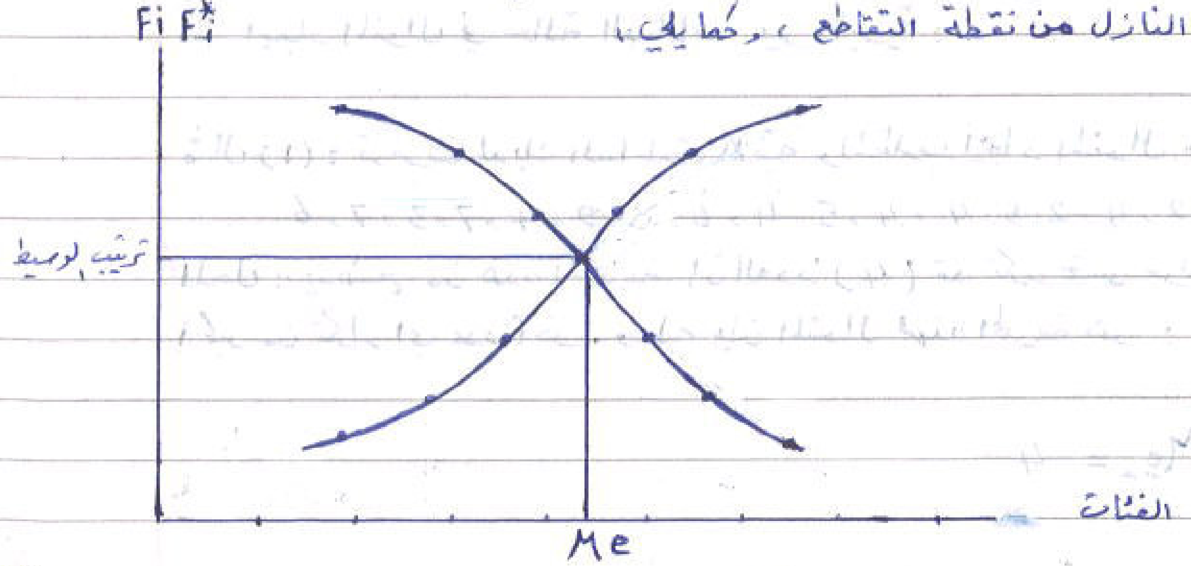
1- نجد قيمة الوسيط بأستخدام المنحنى التكراري المتجمع الصاعد وكما يلي :



2- إيجاد قيمة الوسيط بإستخدام المنحنى التكراري المتجمع النازل وكما يلي:



3- إيجاد قيمة الوسيط بإستخدام المنحنى التكراري المتجمع الصاعد والمنحنى المتجمع النازل من نقطة التقاطع ، وكما يلي:



مزايا وعيوب الوسيط

أ- المزايا :

1- بساطه فكرته . 2- سهل الفهم والحساب .

3- يمكن تقدير قيمته عن طريق التخمين والتأمل . 4- يمكن ايجاده هندسيًا .

5- لا يتأثر إطلاقًا بالقيم الشاذه والمتطرفة .

6- يمكن حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة من طرف واحد او من طرفين . 7- يمكن ايجاده في حالة البيانات الوصفية .

8- يمكن ايجاده في حالة التوزيعات التكرارية ذات الفئات غير المتساوية الاطوال .

ب- العيوب .

1- لا يخضع للعمليات الجبرية . 2- لا يتأثر على نحو كبير بأخطاء المعاينة .

3- لا يستند في حسابه على كافة البيانات المتاحة ، إذ بمجرد معرفة ترتيب الوسيط تحدد قيمته في حالة البيانات غير المبوبة وتهمل بقية القيم الأخرى وكذلك الحال بالنسبة للتوزيعات التكرارية عند العلم بفئة الوسيط تهمل بقية الفئات الأخرى .

ثالثاً :- المنوال : The mode

تعريف المنوال : تلك القيمة التي تتكرر أكثر من غيرها من بين مجموعة من القيم (عينة من قياسات مجموعة من المفردات) أو انها القيمة الشائعة من بين مجموعة من القيم .

- طرق ايجاد المنوال :

1- ايجاد المنوال في حالة البيانات غير المبوبة :

مثال (1) : توفرت لديك البيانات الآتية والمطلوب ايجاد المنوال :

2 , 3 , 2 , 4 , 2 , 5 , 4 , 4 , 5 , 4 , 6 , 8 , 9 , 4 , 7 , 3 , 7 , 6

الحل : يتضح من هذه المجموعة إن العدد (4) قد تكرر خمس مرات وهو أكبر من تكرار اي عدد آخر . وعليه فإن المنوال لهذه المجموعة هو :

$$M_o = 4$$

مثال (2): جد المنوال للبيانات الآتية:

2 , 4 , 3 , 6 , 8 , 7 , 10 , 12

الحل: يتضح من هذه المجموعة انه لا يوجد عدد تكرر أكثر من غيره، وعليه فإنه لا يوجد منوال لهذه المجموعة.

ملاحظة: من الممكن وجود أكثر من منوال واحد لمجموعة من البيانات في حالة تساوي التكرار.

مثال (3): توفرت لديك البيانات الآتية والمطلوب ايجاد المنوال:

7 , 6 , 3 , 8 , 6 , 5 , 3

الحل: يتضح من هذه المجموعة ان القيم الأكثر تكراراً هما (3 , 6)، وعليه فإنه يوجد منوالان وبهذه الحالة يسمى منوال ثنائي. $Mo = \{6 , 3\}$

2- ايجاد المنوال في حالة البيانات المبوبة:

أ- في حالة ايجاد المنوال لبيانات مبوبة لمتغير عشوائي متقطع:

مثال (1): الآتي توزيع تكراري يمثل توزيع (40) عائلة فلاحية حسب ملكيتها من عدد اشجار البرتقال. المطلوب تحديد المنوال لهذا التوزيع.

عدد الاشجار:	60 – 74	75 – 89	90 – 104	105 – 119	120 – 134
عدد العوائل:	2	6	14	10	8

الحل:

1- نبحث عن أكبر تكرار موجود في هذا التوزيع وهو العدد (14) الذي يقابل الفئة الثالثة (90–104)، وعليه فإن المنوال في هذا التوزيع هو مركز هذه الفئة.

$$Mo = \frac{90+104}{2} = 97$$ شجرة برتقال

ملاحظة (1): في حالة وجود كسور عشرية يتم تقريب الناتج الى أقرب عدد صحيح.

ملاحظة (2): في حالة ظهور احدى الحالات التالية في جدول توزيع تكراري عندئذ يتم استخدام طريقة التجميع لايجاد قيمة المنوال، وهي كالآتي:

1- وجود عدد من التكرارات المتساوية كل منها يمثل اكبر تكرار في التوزيع بمعنى (وجود اكثر من قيمة واحدة للمنوال).

2- وجود تذبذب في التوزيع، اي وجود تزايد في قيم تكرارات التوزيع ثم تناقص وبعد ذلك تزايد وهكذا.

3- وجود أكبر تكرار في التوزيع يقابل الفئة الاولى او الفئة الأخيرة من التوزيع.

مثال (2): توفر لديك التوزيع التكراري الآتي والمطلوب ايجاد المنوال:

مركز الفئة (X_i): 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

التكرار (f_i): 2 5 9 24 26 30 24 15 35 6

الحل:- نلاحظ وجود تذبذب في التوزيع (تزايد في قيم التكرارات ثم تناقص متزايد) وعليه نستخدم طريقة التجميع لتحديد قيمة المنوال وكما في الجدول الآتي:

عمليات التجميع

قيم X	التكرار f (1)	التجميع الاول (2)	التجميع الثاني (3)	التجميع الثالث (4)	التجميع الرابع (5)
3	2	7			16
4	5		14	38	
5	9	33			
6	24		50		80
7	26	56		80	
8	30		54		
9	24	39			74
10	15		50	56	
11	35	41			
12	6				

نلاحظ من الجدول اعلاه إن حقل التجميع الاول يمثل (حاصل دمج كل تكرارين متتاليين في الحقل رقم (1) في حين حقل التجميع الثاني يمثل (حاصل دمج كل تكرارين متتاليين في الحقل رقم (1) بعد اهمال التكرار الاول (2) والتكرار الاخير (6) وهكذا، علماً انه لا توجد قاعدة ثابتة يمكن الاستناد عليها في عمليات التجميع، وبعد ذلك يتم عمل خلاصة للجدول وكما يلي:

رقم العمود (1)	اكبر تكرار ظهر في العمود (2)	قيم X التي اعطت اكبر تكرار (3)
1	35	11
2	56	7 , 8
3	54	8 , 9
4	80	7 , 8 , 9
5	80	6 , 7 , 8

بعد اجراء الخلاصة للجدول نلاحظ ان القيم في حقل رقم (3) بأن القيمة (8) تكررت أكثر من غيرها، وعليه فان قيمة المنوال لهذا التوزيع $X_i = 8$ وليس $X_i = 11$ بالرغم من كونها تمثل أكبر تكرار.

$$Mo = 8$$

ب - في حالة ايجاد المنوال لبيانات مبوبة لمتغير عشوائي مستمر :

مثال (1) : الآتي توزيع تكراري لاطوال عينة من الاشخاص البالغين قوامها (50) شخص. المطلوب حساب القيمة الشائعة لطول الشخص في هذه العينة :

فئات الطول (سم) :	150 -	160 -	170 -	180 -	190 - 200
عدد الاشخاص :	8	12	15	9	6

الحل :- واضح من التوزيع إن اكبر تكرار هو (15) وعليه فإن فئة المنوال هي الفئة (170 - 180) اي الفئة الثالثة وبذلك نطبق الصيغة الاتية :

$$Mo = L_k + \frac{(f_k - f_{k-1})}{(f_k - f_{k-1}) + (f_k - f_{k+1})} \cdot h_k$$

حيث إن :

L_k : تمثل الحد الادنى لفئة المنوال.

f_k : تمثل القيمة التي تمثل اكبر تكرار في التوزيع.

f_{k-1} : تمثل التكرار السابق لتكرار فئة المنوال

f_{k+1} : تمثل التكرار اللاحق لتكرار فئة المنوال.

h_k : تمثل طول فئة المنوال.

$L_k = 170$ ، $f_k = 15$ ، $f_{k-1} = 12$ ، $f_{k+1} = 9$ ، $h_k = 10$

$$Mo = 170 + \frac{(15 - 12)}{(15 - 12) + (15 - 9)} \times 10 = 170 + \frac{30}{90} = 173.33$$ سنتمتر

مثال (2) الآتي توزيع تكراري لاعمار عدد من المرضى الراقدين في احدى المستشفيات والمطلوب إيجاد العمر الشائع للمريض في هذه العينة.

فئات العمر :	اقل من 20	20 -	30 -	40 -	50 -	60 فأكثر
عدد المرضى :	2	8	16	17	23	14

$L_{k(5)} = 50$ ، $f_{k(5)} = 23$ ، $f_{k-1(4)} = 17$ ، $f_{k+1(6)} = 14$ ، $h_{k(5)} = 10$

$$Mo = L_k + \frac{(f_k - f_{k-1})}{(f_k - f_{k-1}) + (f_k - f_{k+1})} \times h_k$$

$$= 50 + \frac{(23 - 17)}{(23 - 17) + (23 - 14)} \times 10 = 50 + \frac{60}{15} = 54$$ سنة

ملاحظة :- في المثال رقم (2) نلاحظ انه على الرغم من كون التوزيع مفتوح من كلا الطرفين الا انه بالامكان ايجاد قيمة المنوال وهذه تمثل احدى مزايا هذا المقياس.

مثال (3) : توفرت لديك البيانات للتوزيع التكراري الآتي. المطلوب حساب المنوال.

class :	5 -	10 -	15 -	25 -	35 -	50 - 60
fi :	2	6	10	22	27	11

الحل: نلاحظ (1) اكبر تكرار في التوزيع هو (27) الذي يقابل الفئة الخامسة. (2) ان فئات التوزيع غير متساوية الاطوال، لذلك يجب اولاً تعديل التكرارات من خلال قسمة كل تكرار على طول فئته ومن ثم ايجاد المنوال على اساس التكرارات المعدلة وكمايلي:

class	f_i	التكرار المعدل = $\frac{\text{التكرار}}{\text{طول الفئة}} = \frac{f_i}{L_i}$
5 -	2	$\frac{2}{5} = 0.4$
10 -	6	$\frac{6}{5} = 1.2$
15 -	10	$\frac{10}{10} = 1$
25 -	22	$\frac{22}{10} = 2.2$
35 -	27	$\frac{27}{15} = 1.8$
50 - 60	11	$\frac{11}{10} = 1.1$

نلاحظ من الجدول اعلاه ان اكبر تكرار معدل هو (2.2)، وعليه فإن فئة المنوال هي الفئة الرابعة (25-35).

$$\therefore L_{(4)} = 25 ,\quad \underset{(3)}{f_{k-1}} = 1 ,\quad \underset{(5)}{f_{k+1}} = 1.8 ,\quad \underset{(4)}{f_k} = 2.2 ,\quad \underset{(4)}{h_k} = 10$$

$$\therefore Mo = 25 + \frac{(2.2-1)}{(2.2-1)+(2.2-1.8)} \times 10 = 25 + \frac{1.2}{1.6} = 25 + 7.5 = 32.5$$

مثال (4) للتوزيع التكراري الآتي اوجد المنوال.

الفئات :	10 -	20 -	30 -	40 -	50 -	60 - 70
التكرار :	30	12	16	28	26	14

الحل: واضح من التوزيع أن التكرار الأكبر يقابل الفئة الاولى (30) وكذلك هناك تذبذب في تكرارات التوزيع، وعليه سوف نستخدم طريقة التجميع لتحديد المنوال.

الفئات	التكرار f_i (1)	التجميع الاول (2)	التجميع الثاني (3)	التجميع الثالث (4)
10 -	30	42		58
20 -	12		28	
30 -	16	44		
40 -	28		54	68
50 -	26	40		
60 - 70	14			

خلاصة الجدول :

رقم العمود	أكبر تكرار ظهر في العمود	الفئات التي اعطت أكبر تكرار
1	30	الاولى
2	44	الثالثة والرابعة
3	54	الرابعة والخامسة
4	68	الرابعة والخامسة والسادسة

نلاحظ إن الفئة الرابعة قد تكررت أكثر من غيرها، وعليه فأن فئة المنوال هي الفئة الرابعة (40 - 50) .

$\therefore\ L_4 = 40\ ,\ \underset{(4)}{f_k} = 28\ ,\ \underset{(3)}{f_{k-1}} = 16\ ,\ \underset{(5)}{f_{k+1}} = 26\ ,\ \underset{(4)}{h_k} = 10$

$$Mo = 40 + \frac{(28 - 16)}{(28-16)+(28-26)} \times 10 = 40 + 8.57 = 48.57$$

مزايا وعيوب المنوال

أ- المزايا :

1- مقياس سهل الفهم والحساب .

2- يمكن تقدير قيمة المنوال عن طريق التخمين والتأمل .

3- يمكن ايجاد قيمة المنوال في حالة المتغير الوصفي (نوعي) مثل تقديرات طالب معين في مجموعة امتحانات (مقبول ، متوسط ، جيد ، جيد جداً ، امتياز) .

4- لا يتأثر اطلاقاً بالقيم الشاذة والمتطرفة .

5- يمكن ايجاده في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة من طرف واحد او طرفين .

6- يمكن تعيين المنوال هندسياً .

ب - العيوب

1- تتأثر على نحو كبير بأخطاء المعاينة .

2 - لا تستند عملية ايجاده الى كافة البيانات المتاحة إذ بمجرد ملاحظة أكبر تكرار يتم معرفة المنوال او فئته وتهمل كافة القيم الاخرى او الفئات الاخرى .

3 - لا يخضع للعمليات الجبرية .

رابعاً :- الوسط التوافقي : Harmonic mean

يعتبر احد مقاييس النزعة المركزية ذات الاستخدامات القليلة في التطبيقات الاحصائية . والبعض يطلق عليه المعدل التوافقي .

تعريف الوسط التوافقي : هو مقلوب الوسط الحسابي لمقلوبات القيم ويرمز له بالرمز " H " .

طرق حساب الوسط التوافقي

1- الوسط التوافقي لبيانات غير مبوبة :

لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ تمثل قياسات مفردات عينة قوامها n ووفقاً للتعريف فإن الوسط التوافقي (H) يمكن حسابه وفق الصيغة الآتية :

$$1- \quad H = \frac{n}{\sum_{i=1} \frac{1}{X_i}} \quad , X_i \neq 0$$ حيث ان ⇐

أو

$$2- \quad \frac{1}{H} = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X}$$

مثال(1) :- اوجد المعدل التوافقي للبيانات التالية : 2,5,3,4,7,8,8

الحل :-

$$\frac{1}{X_i} = 0.5, 0.2, 0.33, 0.25, 0.14, 0.13, 0.13$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{7} \frac{1}{X_i} = 1.68 \quad , \therefore H = \frac{n}{\sum \frac{1}{X_i}} = \frac{7}{1.68} = 4.17$$

أو

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i} = \frac{1}{7} \times (1.68) = 0.24$$

$$H = \frac{1}{H} = \frac{1}{0.24} = 4.17$$

2 - الوسط التوافقي لبيانات مبوبة :

لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_m$ تمثل مراكز فئات توزيع تكراري عدد فئاته m وان $f_1, f_2, \ldots, f_m$ تمثل التكرارات المقابلة لهذه الفئات ، عندئذٍ يتم حساب الوسط التوافقي لهذا التوزيع وفق الصيغة الآتية :

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i}{\sum_{i=1}^{m} \frac{f_i}{X_i}}$$

مثال (1) : استخرج الوسط التوافقي للتوزيع التكراري الاتي (يمثل توزيعاً لعدد من العاملين في مصنع معين حسب فئات الأجر الشهري (بالدينار) .

فئات الاجر : 50 - 60 - 70 - 80 - 90 - 100 - 110 - 120

عدد العاملين : 8 10 16 14 10 5 2

الحل :- نعمل الجدول الآتي :

الفئات	التكرار f_i	مراكز الفئات X_i	f_i / X_i
50 -	8	55	0.145
60 -	10	65	0.154
70 -	16	75	0.213
80 -	14	85	0.165
90 -	10	95	0.105
100 -	5	105	0.048
110 - 120	2	115	0.017
المجموع	65	—	0.847

$\therefore H = \frac{65}{0.847} = 74.741$ دينار

ملاحظة : يمكن ايجاد قيمة الوسط التوافقي سواء كانت أطوال الفئات للتوزيع التكراري متساوية ام غير متساوية .

مثال (2) : اوجد الوسط التوافقي لبيانات توزيع درجات 40 طالب في مادة الاحصاء :

الفئات : 37 - 49 50 - 62 63 - 75 76 - 88 89 - 101

التكرار : 4 8 11 12 5

الحل :- نعمل الجدول الآتي .

f_i / x_i	x_i	f_i	class
0.0930	43	4	37 – 49
0.1429	56	8	50 – 62
0.1594	69	11	63 – 75
0.1463	82	12	76 – 88
0.0526	95	5	89 – 101
0.5942	—	40	المجموع

يمكن استخدام الصيغة الاتية :-

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{\sum f_i}\left[\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \dots + \frac{f_k}{x_k}\right]$$

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{40}\left[0.5942\right] = 0.014855$$

$$H = \frac{1}{0.014855} = 67.32$$

العلاقة بين بعض مقاييس النزعة المركزية

ترتبط بعض مقاييس النزعة المركزية مع بعضها بعلاقات معينة وفق شروط معينة وهذه العلاقات مهمة اثناء التطبيق .

١- العلاقة بين الوسط الحسابي ، الوسيط ، المنوال .

توجد علاقة تجريبية بين المقاييس الثلاثة (الوسط الحسابي – الوسيط – المنوال) وذلك في حالة التوزيعات التكرارية أحادية المنوال وغير المتماثلة وذات الالتواء البسيط وتعطى هذه العلاقة من خلال المعادلة الآتية :

الوسط الحسابي – المنوال = 3 (الوسط الحسابي – الوسيط)

وقد وجد ان الوسيط تقع قيمته بين قيمتي الوسط الحسابي والمنوال . وفي حالة التوزيعات التكرارية المتماثلة الوحيدة المنوال فإن قيمة الوسط الحسابي تكون مساوية لقيمة الوسيط وتكون مساوية لقيمة المنوال اي أن .

الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال

مثال: تعذر في احدى التوزيعات القريبة من حالة التماثل الحصول على قيمة للوسط الحسابي في حين امكن الحصول على قيمة (Me ، Mo) حيث كانتا Me=52 ، Mo=53 . جد قيمة الوسط الحسابي .

الحل :

$$\bar{X} = \frac{3(52)-53}{2} = 51.5$$

مثال: الجدول التكراري الآتي يعرض توزيع (100) عامل في مزرعة حسب الاجر اليومي بالدولار .

الأجر	50-70	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170	170-190	المجموع
عدد العمال	8	15	28	20	15	8	6	100

المطلوب : حساب الوسط والوسيط والمنوال .

الحل :

1- حساب الوسط الحسابي $\bar{X}$: نقوم بعمل الجدول الآتي :

الفئات	التكرار f_i	مراكز الفئات X_i	$f_i * X_i$
50 - 70	8	60	480
70 - 90	15	80	1200
90 - 110	28	100	2800
110 - 130	20	120	2400
130 - 150	15	140	2100
150 - 170	8	160	1280
170 - 190	6	180	1080
المجموع	100	—	11340

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i X_i}{\sum f_i} = \frac{11340}{100} = 113.4$$

2 - الوسيط Me : نستخرج التكرار المتجمع الصاعد

class	f_i	الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد F_i
50 - 70	8	أقل من 70	8
70 - 90	15	" 90	23
90 - 110	28	" 110	51
110 - 130	20	" 130	71
130 - 150	15	" 150	86
150 - 170	8	" 170	94
170 - 190	6	" 190	100

2- نستخرج ترتيب الوسيط (T) $T = \frac{\sum f_i}{2} = \frac{100}{2} = 50$

3- نقارن ترتيب الوسيط مع التكرار المتجمع الصاعد فنلاحظ ان $23 < 50 < 51$

وعليه فان قيمة الوسيط هي الفئة الرابعة من التوزيع اي الفئة (90-110).

بما ان المتغير العشوائي متغير مستمر نستخدم الصيغة الآتية:

$L_{k(3)} = 90$, $f_{k(3)} = 28$, $h_{k(3)} = 20$, $F_{k-1} = 23$

$$M_e = L_k + \frac{h_k}{f_k}\left(\frac{\sum f_i}{2} - F_{k-1}\right) = 90 + \frac{20}{28}\left(\frac{100}{2} - 23\right)$$

$$= 90 + (0.72 * 27) = 90 + 19.44 = 109.4$$

3- حساب المنوال M_o:

1- استخراج أكبر تكرار في التوزيع الذي يمثل (28) وعليه فان الفئة المنواليه هي الفئة (90-110) اي الفئة الثالثة.

2- نقوم بحساب قيمة المنوال وفق الصيغة الآتية:

$L_{k(3)} = 90$, $f_{k(3)} = 28$, $f_{k-1(2)} = 15$, $f_{k+1(4)} = 20$, $h_{k(3)} = 20$

$$M_o = L_k + \frac{(f_k - f_{k-1})}{(f_k - f_{k-1}) + (f_k - f_{k+1})} \cdot h_k = 90 + \frac{(28-15)}{(28-15)+(28-20)} * 20$$

$$= 90 + \left(\frac{13}{21} * 20\right) = 90 + 12.4 = 102.4$$

نستنتج من النتائج السابقة الآتي:

الوسط الحسابي: $\bar{X} = 113.4$ ، الوسيط: $M_e = 109.4$ ، المنوال: $M_o = 102.4$

اي ان: الوسط > الوسيط > المنوال

خامساً :- الوسط التربيعي : Quadratic Mean

يعرف الوسط التربيعي : بأنه الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات قيم المتغير العشوائي X .

طرق حساب الوسط التربيعي :

أ- حساب الوسط التربيعي في حالة البيانات غير المبوبة :
لتكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ تمثل قياسات مفردات عينة قوامها n ، وحسب تعريف الوسط التربيعي يمكن حسابه وفق الصيغة الآتية :

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}}$$

مثال : جد الوسط التربيعي للبيانات الآتية :

2 , 3 , 4 , 5 , 6

الحل :

1- نجد مجموع مربعات القيم :

$$\sum_{i=1}^{5} X_i^2 = (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 + (5)^2 + (6)^2 = 90$$

$$Q = \sqrt{\frac{90}{5}} = 4.243$$

ب- حساب الوسط التربيعي في حالة البيانات المبوبة :
لتكن $x_1, x_2, \dots, x_m$ تمثل مراكز فئات توزيع تكراري وان $f_1, f_2, \dots, f_m$ تمثل التكرارات المقابلة لهذه الفئات ، فعندئذٍ يمكن حساب الوسط التربيعي (Q) لهذا التوزيع وفق الصيغة الآتية :

$$Q = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} f_i} \cdot \sum_{i=1}^{m} f_i \cdot X_i^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} f_i \cdot X_i^2}{\sum_{i=1}^{m} f_i}}$$

مثال : الآتي توزيع تكراري لاعمار مجموعة من المرضى الراقدين في احدى المستشفيات . والمطلوب حساب الوسط التربيعي لعمر المريض في هذا التوزيع :

فئات العمر : 10 - 20 - 30 - 40 - 50 - 70 - 60

عدد المرضى : 2 3 4 10 36 14

الحل : 1- نعمل الجدول الآتي :

classes	f_i	X_i	X_i^2	$f_i \cdot X_i^2$
10 -	2	15	225	450
20 -	3	25	625	1875
30 -	4	35	1225	4900
40 -	10	45	2025	20250
50 -	36	55	3025	108900
60 - 70	14	65	4225	59150
المجموع	69	-	-	195525

-2
$$Q = \sqrt{\frac{195525}{69}} = 53.233$$

ملاحظة : يمكن ايجاد قيمة الوسط التربيعي سواء كانت أطوال فئات التوزيع متساوية أم غير متساوية .

مزايا وعيوب الوسط التربيعي

أولاً :- المزايا :

1- بساطة فكرته .

2 - عملية حسابه تستند الى كافة البيانات المتاحة .

3 - خضوعه للعمليات الجبرية .

ثانياً : العيوب :

1- توجد بعض الصعوبة في حسابه .

2 - لا يمكن حساب قيمته في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة من طرف واحد او كلا الطرفين .

3 - لا يمكن حساب قيمته لبيانات متغير وصفي .

4 - لا يمكن ايجاد قيمته عن طريق الرسم البياني (هندسياً) .

5 - لا يمكن تحديد قيمته في حالة فقدان قيمه او أكثر من قيم العينة .

سادساً :- الوسط الهندسي Geometric Mean

يعتبر احد مقاييس النزعة المركزية المهمة جداً في الدراسات السكانية وخاصة في حساب معدلات نمو السكان وتكوين الارقام القياسية "index unmbers" .

يعرف الوسط الهندسي : بانه الجذر ذي المرتبة (n) أو الجذر النوني لحاصل ضرب مجموعة قياسات المتغير العشوائي **ببعضها** والبالغ عددها (n) .

طرق حساب الوسط الهندسي

أ- في حالة البيانات غير المبوبة :

لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ تمثل قياسات عينة من المفردات قوامها n بحيث أن $X_i > 0$ لجميع قيم (i) ، فعندئذٍ وبالاستناد لتعريف الوسط الهندسي فانه يمكن حساب الوسط الهندسي G وفق الصيغة الآتية :

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i \right)^{\frac{1}{n}}$$

مثال: - جد الوسط الهندسي للبيانات الآتية:

10 , 20 , 30 , 40 , 50 , 60

الحل: -

$$G = (10 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 50 \cdot 60)^{\frac{1}{6}}$$

$$G = \sqrt[6]{(10 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 50 \cdot 60}$$

$$= (720,000,000)^{\frac{1}{6}} = 29.938$$

ب - في حالة البيانات المبوبة:

لتكن $X_1, X_2, ..., X_m$ تمثل مراكز فئات توزيع تكراري عدد فئاته m بحيث ان $x_i > 0$ لجميع قيم i، وان $f_1, f_2 ... f_m$ تمثل التكرارات المقابلة لهذه الفئات، فعندئذٍ يمكن حساب قيمة الوسط الهندسي لهذا التوزيع وفق الصيغة الآتية:

$$G = \text{anti} - \log_{10}\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{m} f_i \cdot \log_{10} X_i\right) \quad , \quad n = \sum_{i=1}^{m} f_i$$

مثال: - للتوزيع التكراري التالي يطلب حساب الوسط الهندسي؟

الفئات: 10 – 20 – 30 – 40 – 50 – 60 – 70–80

التكرار: 3 5 7 8 6 5 2

الحل: ١- نعمل الجدول الآتي:

$f_i \cdot \log_{10} X_i$	$\log_{10} X_i$	X_i	f_i	classes
3.5283	1.1761	15	3	10 –
6.9895	1.3979	25	5	20 –
10.8087	1.5441	35	7	30 –
13.2256	1.6532	45	8	40 –
10.4424	1.7404	55	6	50 –
9.0645	1.8129	65	5	60 –
3.7502	1.8751	75	2	70 – 80
57.8092	–	–	36	المجموع

ء- نستخدم الصيغة الآتية :

$$G = anti-Log_{10}\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{m} f_i \cdot Log_{10} X_i\right)$$

$$= anti-Log_{10}(1.6058) = 40.35$$

مزايا وعيوب الوسط الهندسي

اولاً :- المزايا :

1- بساطه فكرته .

2- ان حسابه يستند الى كافة البيانات المتاحة .

3- لا يتأثر كثيراً بأخطاء المعاينة .

4- خضوعه للعمليات الجبرية .

ثانياً :- العيوب :

1- لا يمكن تحديد قيمته اذا كانت احدى قيم العينة مساوية للصفر او قيمة سالبة .

2- لا يمكن تحديد قيمته في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة من طرف واحد او طرفين .

3- لا يمكن ايجاد قيمته في حالة البيانات الوصفية .

4- لا يمكن حسابه في حالة فقدان احدى قيم العينة أو أكثر .

5- لا يمكن إيجاده عن طريق الرسم البياني (هندسياً) .

ملاحظة :- يمكن حساب قيمة الوسط الهندسي في حالة تساوي أطوال فئات التوزيع او عدم تساوي اطوال الفئات .